3°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(2^n)}}$.

• pour $n=0$ on a : $2^0 = 1$ d'où $\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 = u_0$.

• Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons que $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(2^n)}}$ et montrons que

$u_{n+1} = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(2^{n+1})}}$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1}$

$$2u_n - 1 = \frac{2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} - 1 = \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} = \frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]^2}$$

$$= \left(1-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2\right)\cdot u_n^2 = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right)\cdot u_n^2$$

d'où $\dfrac{u_n^2}{2u_n-1} = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}} = u_{n+1}$ et par suite $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

Solution 15 :

1°/

▪ $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ d'où (U_n) est une suite croissante